

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)- 3<sup>ο</sup> Γεν. Λύκειο Δράμας

Εκτός από το κεφάλαιο με τα ολοκληρώματα

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 2**

**A.3** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 2**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 2**

**β.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι οπωσδήποτε παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της  $\Delta$ , τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Κάθε συνάρτηση "1-1" είναι γνησίως μονότονη

**Μονάδες 2**

**ε.** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο

**Μονάδες 2**

**στ.** Αν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) είναι δυο διαδοχικές ρίζες μιας συνάρτησης  $f$ , τότε οπωσδήποτε  $f(x) > 0$  ή  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\rho_1, \rho_2)$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

**A. α.** Να δείξετε ότι για οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \text{ αν και μόνο αν } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0.$$

**Μονάδες 8**

**β.** Έστω μια συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο  $[a, \beta]$  και οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha^2 + i f(\alpha)$ ,  $w = f(\beta) + i \beta^2$  με  $\alpha, \beta \neq 0$ . Αν  $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$  να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $[a, \beta]$ .

**Μονάδες 9**

**B.** Αν  $A, B, \Gamma$  είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο και ισχύει  $z_3 = \frac{1}{2}iz_1 + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)z_2$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  τα οποία είναι συνευθειακά.

**Μονάδες 5**

**B. (i)** Να δείξετε ότι  $x \ln x > x - 1$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**(ii)** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$  στο  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**(iii)** Αν  $a, \beta \in (1, +\infty)$  και  $\beta^a = a^\beta$  να δείξετε ότι  $a = \beta$ .

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = \ln(e^{3x} + 1)$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Αν

- η συνάρτηση  $f'$  είναι κυρτή
- η συνάρτηση  $f$  δεν έχει σημεία καμπής, τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι "1-1".

**Μονάδες 5**

**B.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 - 4x^2 - 16x + 50 = 0$  δεν έχει πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 4**

**Γ.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^3 - 6x + \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Αν  $f(x) = (x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)$  όπου  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$  και  $p_1 < p_2 < p_3$ , τότε

**(i)** Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ακρότατα σε δύο σημεία  $\xi_1, \xi_2$  ( $\xi_1 < \xi_2$ ) τέτοια ώστε  $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ .

**Μονάδες 10**

**(ii)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $4x^2 + \beta x + 2 = 0$  δεν έχει πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**